2004年京大後期理 $\boxed{1}$

$g(x)=4nx(1-x)=-4n\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+n$ は、$x=\frac{1}{2}$ に関して対称である。

$n\to\infty$ について考えるので、$f(x)=1$ となる x を求めると

$$-4n\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+n=1 \qquad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{n-1}{4n}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right) \qquad x=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$$

$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right),\ \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\leqq x\leqq 1$ のとき、$f(g(x))=g(x)$ である。対称性より

$$n\int_0^1 f(g(x))dx=2n^2\int_0^{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}\left\{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right\}dx=2n^2\left[-\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+x-\frac{1}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}$$

$$=2n^2\left\{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{n}}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right\}$$

$$=2n^2\left\{\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\frac{1}{3}\right\}=2n^2\left\{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}n^2\left\{2-\left(2+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right\}=\frac{1}{3}n^2\cdot\frac{4-\left(4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2+\left(2+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{3}n^2\cdot\frac{4-\left(4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n}-\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{2+\left(2+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{3}n^2\cdot\frac{\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\left(2+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{3n}}{2+\left(2+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

したがって　$\therefore \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(4nx(1-x))dx=\frac{1}{4}$ ……(答)