

2004 年京大理 1

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos 4\theta - 4\sin^2 \theta = 2\cos^2 2\theta - 1 - 4(1 - \cos^2 \theta) = 2(2\cos^2 \theta - 1)^2 + 4\cos^2 \theta - 5 \\ &= 2(4\cos^4 \theta - 4\cos^2 \theta + 1) + 4\cos^2 \theta - 5 = 8\cos^4 \theta - 4\cos^2 \theta - 3 \\ &= 8\left(\cos^4 \theta - \frac{1}{2}\cos^2 \theta\right) - 3 = 8\left(\cos^2 \theta - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$0 \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$ のとき、 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos \theta \leq 1$ 、 $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ であるから

$f(\theta)$ は、 $\cos^2 \theta = \frac{1}{4}$ 、 $\cos \theta = \pm \frac{1}{2}$ 、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{2}{3}\pi$ のとき、最小値 $-\frac{7}{2}$ をとる。

また、 $\cos^2 \theta = 1$ 、 $\cos \theta = 1$ 、 $\theta = 0$ のとき、最大値 1 をとる。

$f(\theta)$ の最大値は 1 ($\theta = 0$)、最小値は $-\frac{7}{2}$ ($\theta = \frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{2}{3}\pi$) …… (答)