2004年京大理$\boxed{4}$

$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とする。

$$AX-XB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \alpha a & \beta b \\ \alpha c & \beta d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (2-\alpha)a & (2-\beta)b \\ a+(1-\alpha)c & b+(1-\beta)d \end{pmatrix}$$

$Y=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$としたとき、任意の$p,\ q,\ r,\ s$について、下記の①～④を満たす$a,\ b,\ c,\ d$が存在する。

$(2-\alpha)a=p$ ——① $(2-\beta)b=q$ ——② $a+(1-\alpha)c=r$ ——③ $b+(1-\beta)d=s$ ——④

$\alpha=2$のとき、$p\neq 0$であれば、①を満たすaは存在しない。
$\beta=2$のとき、$q\neq 0$であれば、②を満たすbは存在しない。

少なくとも、$\alpha\neq 2$かつ$\beta\neq 2$が必要であり、このとき $a=\dfrac{p}{2-\alpha},\ b=\dfrac{q}{2-\beta}$

③より $(1-\alpha)c=r-a=r-\dfrac{p}{2-\alpha}$ $\alpha=1$のとき、$r-\dfrac{p}{2-\alpha}\neq 0$であれば、③を満たす$c$は存在しない。

④より $(1-\beta)d=s-b=s-\dfrac{q}{2-\beta}$ $\beta=1$のとき、$s-\dfrac{q}{2-\beta}\neq 0$であれば、④を満たす$d$は存在しない。

$\alpha\neq 1$かつ$\alpha\neq 2$かつ$\beta\neq 1$かつ$\beta\neq 2$であれば、任意の$p,\ q,\ r,\ s$について、①～④を満たす$a,\ b,\ c,\ d$が定まる。

$$\therefore a=\frac{p}{2-\alpha},\ b=\frac{q}{2-\beta},\ c=\frac{r}{1-\alpha}-\frac{p}{(1-\alpha)(2-\alpha)},\ d=\frac{s}{1-\beta}-\frac{q}{(1-\beta)(2-\beta)}$$

求める必要十分条件は $\alpha\neq 1$かつ$\alpha\neq 2$かつ$\beta\neq 1$かつ$\beta\neq 2$ ……(答)