2005年京大文 $\boxed{3}$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}=2 \qquad \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=2\beta\overline{\beta}=2|\beta|^2$$

$\alpha=p+qi,\ \beta=r+si$ とすると

$$(p+qi)(r-si)+(p-qi)(r+si)=2(pr+qs)=2(r^2+s^2) \qquad \therefore pr+qs=r^2+s^2 \text{ ——①}$$

ここで、$\overrightarrow{\alpha}=(p,\ q),\ \overrightarrow{\beta}=(r,\ s)$ と表すと、①は $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=\left|\overrightarrow{\beta}\right|^2$ と書ける。

$\overrightarrow{\alpha}$ と $\overrightarrow{\beta}$ がなす角を θ とすれば　$\left|\overrightarrow{\alpha}\right|\left|\overrightarrow{\beta}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\beta}\right|^2$　　$\therefore \left|\overrightarrow{\beta}\right|=\left|\overrightarrow{\alpha}\right|\cos\theta$

これは、複素数平面上で β が表す頂点が、直角であることを示している。
したがって、$0,\ \alpha,\ \beta$ の3点を結んで得られる三角形は、β を直角とする直角三角形である。……(答)

(注)
以下のようにも示せる。

$\overrightarrow{\alpha}-\overrightarrow{\beta}=(p-r,\ q-s)$ であるから　$(\overrightarrow{\alpha}-\overrightarrow{\beta})\cdot\overrightarrow{\beta}=(p-r)r+(q-s)s=(pr+qs)-(r^2+s^2)$

①より　$\therefore (\overrightarrow{\alpha}-\overrightarrow{\beta})\cdot\overrightarrow{\beta}=0$