2005 年京大文 $\boxed{4}$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ であり、$a^2+ab+b^2=\frac{1}{2}\left\{a^2+b^2+(a+b)^2\right\}\geqq 0$ より、$a-b>0$

$65=5\times 13$ であるから

$a-b=1,\ a^2+ab+b^2=65$ のとき

　$a^2+ab+b^2-(a-b)^2=3ab=65-1=64$　$3ab=64$

　左辺は 3 の倍数、右辺は 3 の倍数ではないので不適。

$a-b=65,\ a^2+ab+b^2=1$ のとき

　$3ab=1-65^2=-4224$　$ab=-1408$

　$(a+b)^2=1+ab=-1407<0$ より、不適。

$a-b=5,\ a^2+ab+b^2=13$ のとき

　$3ab=13-5^2=-12$　$ab=-4$

　$(a+b)^2=13+ab=9$　$a+b=\pm 3$

　$a,\ b$ は、$t^2+3t-4=0$ または $t^2-3t-4=0$ の 2 解である。

　$t^2+3t-4=(t+4)(t-1)=0$　$t=-4,\ 1$　$t^2-3t-4=(t-4)(t+1)=0$　$t=-1,\ 4$

　$a-b>0$ より、適するのは　$(a,\ b)=(4,\ -1),\ (1,\ -4)$

$a-b=13,\ a^2+ab+b^2=5$ のとき

　$3ab=5-13^2=-164$

　左辺は 3 の倍数、右辺は 3 の倍数ではないので不適。

以上により　$\therefore (a,\ b)=(4,\ -1),\ (1,\ -4)$　……（答）