2005年京大後期理$\boxed{3}$

$A_n=\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$とすると

$$A_{n+2}=\begin{pmatrix}p_{n+2}\\q_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{n+1}+q_{n+1}\\p_{n+1}-q_{n+1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-q_n\\p_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{n+1}+q_{n+1}-q_n\\p_{n+1}+p_n-q_{n+1}\end{pmatrix}$$

$p_{n+2}=p_{n+1}+q_{n+1}-q_n$ ——① $q_{n+2}=p_{n+1}+p_n-q_{n+1}$ ——②

①より $p_{n+2}-q_{n+1}=p_{n+1}-q_n$ ②より $q_{n+2}-p_{n+1}=-(q_{n+1}-p_n)$

$p_{n+1}-q_n$は一定であるから、$p_2=3,\ q_1=1$より $\therefore p_{n+1}-q_n=2$ ——③

$q_{n+1}-p_n$は公比-1の等比数列であるから、$q_2=1,\ p_1=2$より $\therefore q_{n+1}-p_n=(-1)^n$ ——④

③、④より

$p_{n+2}=q_{n+1}+2=p_n+(-1)^n+2$ $\therefore p_{n+2}=p_n+(-1)^n+2$ ——⑤

$q_{n+2}=p_{n+1}+(-1)^{n+1}=q_n+2+(-1)^{n+1}$ $\therefore q_{n+2}=q_n+(-1)^{n+1}+2$ ——⑥

$n=2m-1$のとき $p_{2m+1}=p_{2m-1}+1,\ q_{2m+1}=q_{2m-1}+3$ $p_1=2,\ q_1=1$より $\therefore p_{2m-1}=m+1,\ q_{2m-1}=3m-2$

$n=2m$のとき $p_{2m+2}=p_{2m}+3,\ q_{2m+2}=q_{2m}+1$ $p_2=3,\ q_2=1$より $\therefore p_{2m}=3m,\ q_{2m}=m$

$n=2m-1$のとき$m=\dfrac{n+1}{2}$、$n=2m$のとき$m=\dfrac{n}{2}$であるから

nが奇数のとき$A_n=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}n+3\\3n-1\end{pmatrix}$、$n$が偶数のとき$A_n=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3n\\n\end{pmatrix}$ ……(答)

※A_nを具体的に計算して予想し、数学的帰納法で示してもよいが、$n=6$くらいまで計算しないと、
奇偶による場合分けが存在することに気づきにくい。意外な難問と言える。