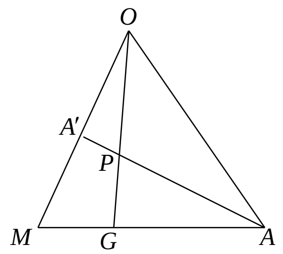
2005年京大後期理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

辺BCの中点をMとする。

△ABCの重心Gは、線分AM上にあり、$AG:GM=2:1$である。



△OAMを考えると、A'は線分OM上にある。

$OA'=aOM\ (0<a<1)$、$A'P:PA=s:1-s\ (0<s<1)$とすると

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA'}+s\overrightarrow{OA}=a(1-s)\overrightarrow{OM}+s\overrightarrow{OA} \quad \text{——①}$$

一方、$\overrightarrow{OG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$であり、$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OG}$であるから　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{3}t\overrightarrow{OM}+\dfrac{1}{3}t\overrightarrow{OA}$ ——②

①、②を比較すると　$a(1-s)=\dfrac{2}{3}t,\ s=\dfrac{1}{3}t$　$a(3-t)=2t$　$\therefore a=\dfrac{2t}{3-t}$

$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$であるから　$\therefore \overrightarrow{OA'}=\dfrac{t}{3-t}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

同様にして　$\therefore \overrightarrow{OB'}=\dfrac{t}{3-t}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}),\ \overrightarrow{OC'}=\dfrac{t}{3-t}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

これより　$\overrightarrow{A'B'}=\dfrac{t}{3-t}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=-\dfrac{t}{3-t}\overrightarrow{AB}$　同様に　$\overrightarrow{B'C'}=-\dfrac{t}{3-t}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{C'A'}=-\dfrac{t}{3-t}\overrightarrow{CA}$

$$\therefore \left|\overrightarrow{A'B'}\right|=\frac{t}{3-t}\left|\overrightarrow{AB}\right|,\ \left|\overrightarrow{B'C'}\right|=\frac{t}{3-t}\left|\overrightarrow{BC}\right|,\ \left|\overrightarrow{C'A'}\right|=\frac{t}{3-t}\left|\overrightarrow{CA}\right|$$

したがって、△$A'B'C'$∽△ABCが示された。（証明終）　相似比は　$\dfrac{t}{3-t}$ ……（答）