2005年京大理$\boxed{3}$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=-2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=0$$
$$\therefore \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=0$$

$\alpha+\beta+\gamma=0$ より　$\beta+\gamma=-\alpha$　$\beta\gamma=-\alpha(\beta+\gamma)=\alpha^2$

β, γ は、2次方程式 $z^2+\alpha z+\alpha^2=0$ の2解であるから　$z=\dfrac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\alpha^2}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\alpha$

$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\alpha,\ \gamma=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\alpha$ とすると　$\beta=e^{i\frac{2}{3}\pi}\alpha,\ \gamma=e^{i\frac{4}{3}\pi}\alpha$

α, β, γ は相違なる複素数であるから、$\alpha\neq 0$ である。複素数平面上において、

β は α を原点中心に $\dfrac{2}{3}\pi$ 回転したものであり、γ は α を原点中心に $\dfrac{4}{3}\pi$ 回転したものである。

$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|$ であるから、α, β, γ を結んで得られる三角形は、原点を重心とした正三角形である。……(答)