2005 年京大理 $\boxed{4}$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ であり、$a^2+ab+b^2=\dfrac{1}{2}\left\{a^2+b^2+(a+b)^2\right\}\geqq 0$ より、$a-b>0$

$217=7\times 31$ であるから

$a-b=1,\ a^2+ab+b^2=217$ のとき

$a^2+ab+b^2-(a-b)^2=3ab=217-1=216\quad ab=72$

$(a+b)^2=217+ab=289\quad a+b=\pm 17$

$a,\ b$ は、$t^2+17t+72=0$ または $t^2-17t+72=0$ の 2 解である。

$t^2+17t+72=(t+8)(t+9)=0\quad t=-9,\ -8\quad t^2-17t+72=(t-8)(t-9)=0\quad t=8,\ 9$

$a-b>0$ より、適するのは　$(a,\ b)=(-8,\ -9),\ (9,\ 8)$

$a-b=217,\ a^2+ab+b^2=1$ のとき

$3ab=1-217^2=-47088\quad ab=-15696$

$(a+b)^2=1+ab=-15695<0$ より、不適。

$a-b=7,\ a^2+ab+b^2=31$ のとき

$3ab=31-49=-18\quad ab=-6$

$(a+b)^2=31+ab=25\quad a+b=\pm 5$

$a,\ b$ は、$t^2+5t-6=0$ または $t^2-5t-6=0$ の 2 解である。

$t^2+5t-6=(t+6)(t-1)=0\quad t=-6,\ 1\quad t^2-5t-6=(t-6)(t+1)=0\quad t=-1,\ 6$

$a-b>0$ より、適するのは　$(a,\ b)=(6,\ -1),\ (1,\ -6)$

$a-b=31,\ a^2+ab+b^2=7$ のとき

$3ab=7-31^2=-954\quad ab=-318$

$(a+b)^2=7+ab=-311<0$ より、不適。

以上により　$\therefore (a,\ b)=(-8,\ -9),\ (9,\ 8),\ (6,\ -1),\ (1,\ -6)$ ……(答)