2005 年京大理 $\boxed{6}$

赤色以外に塗られた車両が、2 両以上連続しないことが条件である。
最後尾の車両が赤色で塗られている場合の数を a_n、最後尾の車両が赤色以外で塗られている場合の数を b_n とする。塗り方の総数は、$a_n + b_n$ で与えられる。

$n=2$ のとき
塗り方は赤赤・赤黄・黄赤・赤青・青赤であるから、$a_2 = 3,\ b_2 = 2$ である。

列車の最後尾に、順次車両を追加していく操作を考える。
n 両編成の列車の最後尾の車両が、赤色で塗られているとき、$n+1$ 両目の車両の色は、何色でもよい。
n 両編成の列車の最後尾の車両が、赤色以外で塗られているとき、$n+1$ 両目の車両の色は、赤に限られる。
これより、以下の漸化式を得る。

$a_{n+1} = a_n + b_n$ ——①　$b_{n+1} = 2a_n$ ——②

$n \geqq 3$ のとき、①、②より　$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$
変形して　$a_{n+1} - 2a_n = -(a_n - 2a_{n-1})$ ——③　$a_{n+1} + a_n = 2(a_n + a_{n-1})$ ——④

①より、$a_3 = a_2 + b_2 = 5$ であるから
③より　$a_{n+1} - 2a_n = (-1)^{n-2}(a_3 - 2a_2) = (-1)^{n-2}(5-6) = (-1)^{n-1}$ ——⑤
④より　$a_{n+1} + a_n = 2^{n-2}(a_3 + a_2) = 2^{n-2}(5+3) = 2^{n+1}$ ——⑥
⑤＋2×⑥より　$3a_{n+1} = 2^{n+2} + (-1)^{n-1}$　$a_{n+1} = \dfrac{2^{n+2} + (-1)^{n-1}}{3}$

①より、求める総数 $a_n + b_n$ は、a_{n+1} に等しいから　$\therefore \dfrac{2^{n+2} + (-1)^{n-1}}{3}$ ……(答)

$n=2$ でも成立する。