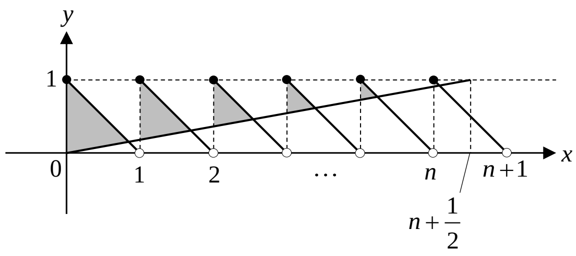
2006年京大後期文 $\boxed{4}$

$k \leqq x < k+1$ のとき　$[x+1]-x=k+1-x$



領域 D_n を図示すると、右図のように $n+1$ 個の三角形になり、各辺の平行性から、これらの三角形は互いに相似である。

今、$y=\dfrac{x}{n+\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{2n+1}x$ と、$x=k\ (0 \leqq k \leqq n)$ との交点を P_k とし、$Q_k(k,1)\ (0 \leqq k \leqq n)$ とする。

また、$y=\dfrac{2}{2n+1}x$ と、$x=k+1-x\ (0 \leqq k \leqq n)$ との交点を R_k とする。

$P_0Q_0=1,\ P_kQ_k=1-\dfrac{2}{2n+1}k$ であるから、$\triangle P_0Q_0R_0$ と $\triangle P_kQ_kR_k$ の相似比は、$1-\dfrac{2}{2n+1}k$ である。

$\dfrac{2}{2n+1}x=1-x$ とすると　$\dfrac{2n+3}{2n+1}x=1$　$\therefore x=\dfrac{2n+1}{2n+3}$　$\triangle P_0Q_0R_0$ の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \dfrac{2n+1}{2n+3}=\dfrac{2n+1}{2(2n+3)}$

$\triangle P_kQ_kR_k$ の面積 S_k は　$S_k=\dfrac{2n+1}{2(2n+3)}\cdot\left(1-\dfrac{2}{2n+1}k\right)^2=\dfrac{(2n+1)^2-4(2n+1)k+4k^2}{2(2n+1)(2n+3)}$

求める面積は

$$\sum_{k=0}^{n} S_k=\frac{1}{2(2n+1)(2n+3)}\left\{(2n+1)^2(n+1)-2(2n+1)\cdot n(n+1)+\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)\right\}$$

$$=\frac{n+1}{2(2n+3)}\left\{(2n+1)-2n+\frac{2}{3}n\right\}=\frac{n+1}{2(2n+3)}\cdot\frac{2n+3}{3}=\frac{n+1}{6}\quad\cdots\cdots(答)$$