2006年京大後期理$\boxed{2}$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_{n-1} + (1-a)y_{n-1} \\ (1-a)x_{n-1} + ay_{n-1} \end{pmatrix}$$

これより　$x_n = ax_{n-1} + (1-a)y_{n-1}$ ——①　$y_n = (1-a)x_{n-1} + ay_{n-1}$ ——②

①＋②より　$x_n + y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$　$x_0 = 1,\ y_0 = 0$ であるから　$\therefore x_n + y_n = 1$ ——③

①、③より　$x_n = ax_{n-1} + (1-a)(1 - x_{n-1}) = (2a-1)x_{n-1} + 1 - a$

$$x_n - \frac{1}{2} = (2a-1)\left(x_{n-1} - \frac{1}{2}\right) = (2a-1)^n\left(x_0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2a-1)^n \quad \therefore x_n = \frac{1}{2}\left\{(2a-1)^n + 1\right\}$$

x_n が収束する条件は　$-1 < 2a - 1 \leqq 1$　$\therefore 0 < a \leqq 1$ ……（答）