

2006 年京大後期理 3

求める確率を p_n とする。

$n=1$ のとき 4 の目が出たときであるから $p_1 = \frac{1}{6}$

$n=2$ のとき 2 と 3 の目、1 と 4 の目のいずれかが出たときであるから $p_2 = 2 \times 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$n=3$ のとき 1 と 1 と 4 の目、1 と 2 と 3 の目、2 と 2 と 2 の目のいずれかが出たときであるから

$$p_3 = {}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 3! \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{3+6+1}{6^3} = \frac{5}{108}$$

$n \geq 4$ のとき

i) 1 の目が $n-1$ 個、4 の目が 1 個出る。

ii) 1 の目が $n-2$ 個、2 の目が 1 個、3 の目が 1 個出る。

iii) 1 の目が $n-3$ 個、2 の目が 3 個出る。

のいずれかであるから

$$\begin{aligned} p_n &= ({}_nC_1 + 2{}_nC_2 + {}_nC_3) \left(\frac{1}{6}\right)^n = \left\{ n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right\} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \left\{ n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right\} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{n\{6n + (n^2 - 3n + 2)\}}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{n(n^2 + 3n + 2)}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6^{n+1}} \end{aligned}$$

これは $n=1, 2, 3$ でも成立。

以上により $\therefore p_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6^{n+1}} \dots\dots$ (答)