

2006 年京大後期理 [6] 文 [5] 共通

$\tan\alpha, \tan\beta$  が有理数であるとき、

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$  は、有理数である。  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan\alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$  は、有理数である。

$\tan 1^\circ$  は有理数と仮定すると

$\tan 2^\circ = \tan(2 \times 1^\circ)$  は有理数である。  $\tan 3^\circ = \tan(1^\circ + 2^\circ)$  は有理数である。  $\tan 5^\circ = \tan(2^\circ + 3^\circ)$  は有理数である。

$\tan 10^\circ = \tan(2 \times 5^\circ)$  は有理数である。  $\tan 20^\circ = \tan(2 \times 10^\circ)$  は有理数である。

$\tan 30^\circ = \tan(10^\circ + 20^\circ)$  は有理数である。  $\tan 60^\circ = \tan(2 \times 30^\circ)$  は有理数である。

ところが、 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$  は無理数であるから、矛盾する。

したがって、 $\tan 1^\circ$  は有理数という仮定が誤りであり、 $\tan 1^\circ$  は無理数である。……(答)

※1997 年後期文系 [2] と発想は同じ。