

2006 年京大理 1 文 3 共通

$P(x) = Q(x)R(x) + ax + b$ とおく。 $(a, b) \neq (0, 0)$ である。

$\{P(x)\}^2 = \{Q(x)R(x)\}^2 + 2(ax+b)Q(x)R(x) + (ax+b)^2$ が、 $Q(x)$ で割り切れるので、 $(ax+b)^2$ が $Q(x)$ で割り切れる。
 $Q(x)$ は 2 次式であるから、定数 q によって、 $(ax+b)^2 = qQ(x)$ と書ける。

ここで、 $a=0$ とすると左辺 b^2 は定数であり、 $q=0$ でなければならない。
結局 $a=b=0$ となり、 $P(x)$ が $Q(x)$ で割り切れないことに反する。

したがって、 $a \neq 0$ であるから $\therefore Q(x) = \frac{1}{q}(ax+b)^2 = \frac{a^2}{q} \left(x + \frac{b}{a}\right)^2$

$Q(x) = 0$ は、重解 $x = -\frac{b}{a}$ を持つ。(証明終)