2006年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{4}$共通

$f(x)$ の $x \leqq 0$ の部分は、$a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}=ax^2+ax+\dfrac{a+1}{4}$ と表せる。

$f(0)=0$ より　$\dfrac{a+1}{4}=0$　$\therefore a=-1$　$f(x)=-x^2-x$

$y=f(x)$ は原点に関して点対称であるから、$f(x)$ の $x \geqq 0$ の部分は

$-f(x)=-(-x)^2-(-x)=-x^2+x$　$\therefore f(x)=x^2-x$

$x \leqq 0$ のとき、$f'(x)=-2x-1$ であるから　$f'(-1)=1$　$x=-1$ における接線は　$y=x+1$

$y=x+1$ と、$y=f(x)$ の $x \geqq 0$ の部分との交点の x 座標を求める。

$x^2-x=x+1$　$x^2-2x-1=0$　$\therefore x=1+\sqrt{2}$

$y=f(x)$ のグラフと、$y=x+1$ によって囲まれる図形は、右図(a)の通り。
対称性により、この面積は、右図(b)で示された部分の面積に等しい。
求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(2+\sqrt{2})^2-\int_1^{1+\sqrt{2}}(x^2-x)dx$$

$$=\frac{6+4\sqrt{2}}{2}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^{1+\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}-\left(\frac{7+5\sqrt{2}}{3}-\frac{3+2\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{6}\right)$$

$$=3+2\sqrt{2}-\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)=2+\frac{4}{3}\sqrt{2}\quad\cdots\cdots(答)$$