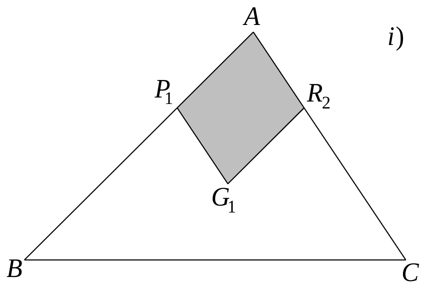
2006年京大理 $\boxed{5}$

$0<p<1,\ 0<q<1,\ 0<r<1$ として、$\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ}=(1-q)\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AC}$ とおく。

点 A を基準とした位置ベクトルを考えると、$\triangle PQR$ の重心 G_2 は

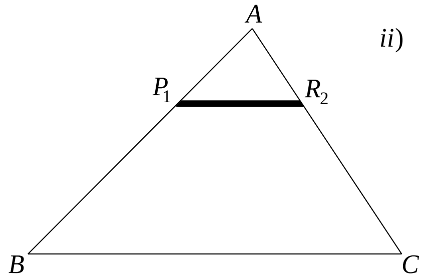
$$\overrightarrow{AG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{3}p\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}r\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(1-q)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}q\overrightarrow{AC}$$



ここで、$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}p\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}r\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}(1-q)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}q\overrightarrow{AC}$ とすると

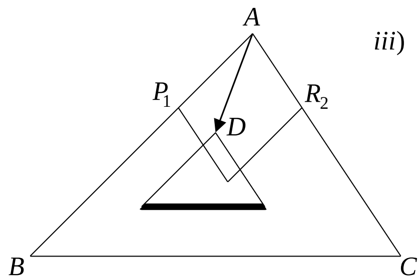
点 D の存在範囲は、右図 i)の平行四辺形の内部であり、境界線を除く。

$AP_1=\frac{1}{3}AB,\ AR_2=\frac{1}{3}AC$ であり、G_1 は $\triangle ABC$ の重心である。

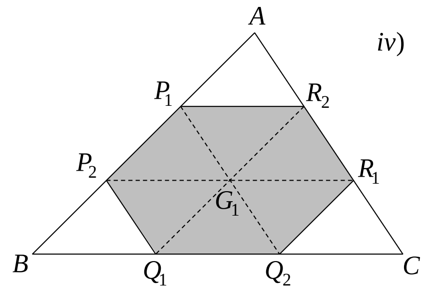


点 E の存在範囲は、右図 ii)の太線上であり、両端の点は除く。

$AP_1=\frac{1}{3}AB,\ AR_2=\frac{1}{3}AC$ であるから、$P_1R_2 \parallel BC$ である。



点 D を固定したとき、G_2 の存在範囲は、右図 iii)の太線上であり、両端の点は除く。



点 D を図 i)の範囲内で動かせば、G_2 の存在範囲は右図(iv の通り。境界線を除く。

なお、$P_1,\ P_2$ は AB を、$Q_1,\ Q_2$ は BC を、$R_1,\ R_2$ は CA を、それぞれ三等分する。