

2007 年京大文 [2]

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x-1)(x-2) \text{ とすると } f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 = 3 \left(x - \frac{2-\sqrt{7}}{3} \right) \left(x - \frac{2+\sqrt{7}}{3} \right)$$

$f(x)$ の増減は右の通り。

$f'(1) = -2$ であり、 l の方程式は $y = -2x + 2$

$y = f(x)$ のグラフと、 l で囲まれた部分を図示すると、右図の通り。

x	...	$\frac{2-\sqrt{7}}{3}$...	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

求める体積は

$$\begin{aligned} & \pi \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2)^2 dx - \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 1 \\ &= \pi \int_0^1 (x^2 - 1)^2 (x - 2)^2 dx - \frac{4}{3} \pi \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1)(x^2 - 4x + 4) dx - \frac{4}{3} \pi \\ &= \pi \int_0^1 (x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 4x + 4) dx - \frac{4}{3} \pi \\ &= \pi \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2}{3} x^6 + \frac{2}{5} x^5 + 2x^4 - \frac{7}{3} x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^1 - \frac{4}{3} \pi \\ &= \pi \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + 2 - \frac{7}{3} - 2 + 4 \right) - \frac{4}{3} \pi \\ &= \pi \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{5} + 1 \right) - \frac{4}{3} \pi = \pi \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right) \pi = \frac{15 + 42 - 35}{105} \pi = \frac{22}{105} \pi \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

