

2007 年京大文 [4]

l 上の点 P は、 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+3 \\ s+4 \\ s \end{pmatrix}$ と表せて、 m 上の点 Q は、 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+2 \\ -2t-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表せる。

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (s+3-t-2)^2 + (s+4+2t+1)^2 + s^2 = (s-t+1)^2 + (s+2t+5)^2 + s^2 \\ &= s^2 - 2(t-1)s + (t-1)^2 + s^2 + 2(2t+5)s + (2t+5)^2 + s^2 \\ &= 3s^2 + (2t+12)s + 5t^2 + 18t + 26 = 3\left(s^2 + 2 \cdot \frac{t+6}{3}s\right) + 5t^2 + 18t + 26 \\ &= 3\left(s + \frac{t+6}{3}\right)^2 - \frac{(t+6)^2}{3} + 5t^2 + 18t + 26 = 3\left(s + \frac{t+6}{3}\right)^2 - \frac{t^2 + 12t + 36}{3} + 5t^2 + 18t + 26 \\ &= 3\left(s + \frac{t+6}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}t^2 + 14t + 14 = 3\left(s + \frac{t+6}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}(t^2 + 3t + 3) \\ &= 3\left(s + \frac{t+6}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}\left\{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\} = 3\left(s + \frac{t+6}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

これより、 PQ^2 は、 $s = -\frac{t+6}{3}$, $t = -\frac{3}{2}$ のとき、すなわち $s = t = -\frac{3}{2}$ のとき、最小値 $\frac{7}{2}$ をとる。

PQ の最小値は $\therefore \frac{\sqrt{14}}{2}$ …… (答)