2007 年京大理甲 $\boxed{1}$

(1)

$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$であるから、ケーリー・ハミルトンの定理より　$A^2=A-2E$

$A^3=A^2-2A=(A-2E)-2A=-A-2E$　　$A^4=-A^2-2A=-(A-2E)-2A=-3A+2E$

$A^6=-3A^3+2A^2=-3(-A-2E)+2(A-2E)=5A+2E$

$$A^6+2A^4+2A^3+2A^2+2A+3E$$
$$=5A+2E+2(-3A+2E)+2(-A-2E)+2(A-2E)+2A+3E=A+E$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ ……(答)

(2)

3 回とも同じ得点である場合が n 通り。

1 回目と 2 回目、または 2 回目と 3 回目が同じ得点である場合が $2\times{}_nC_2=n(n-1)$ 通り。

3 回とも異なる得点である場合が ${}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 通り。

すべての場合を足すと

$$n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=n\cdot\frac{6+6(n-1)+(n^2-3n+2)}{6}=\frac{n(n^2+3n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

すべての得点の出し方は n^3 通りであるから、求める確率は　$\therefore\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6n^3}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{6n^2}$　……(答)

2007年京大理乙 $\boxed{1}$

(1)

$x=2\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$　$\begin{array}{c|c} x & 0\to 2 \\ \hline \theta & 0\to\dfrac{\pi}{4}\end{array}$

$$\int_0^2\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\tan\theta+1}{\sqrt{4(\tan^2\theta+1)}}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4\tan\theta+1)\cdot\frac{\cos\theta}{2}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\right\}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}\right)\cos\theta\right\}d\theta$$

$$=\left[\frac{4}{\cos\theta}+\frac{1}{2}\left\{\log(1+\sin\theta)-\log(1-\sin\theta)\right\}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left[\frac{4}{\cos\theta}+\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-4=4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2-4=4\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)-4$$ ……(答)

(2)

n 段昇る昇り方の総数を a_n と表す。

最初の1歩で1段昇ったとき、その後の昇り方の総数は a_{n-1} 通り。

最初の1歩で2段昇ったとき、次の1歩は1段しか昇れないから、その後の昇り方の総数は a_{n-3} 通り。

漸化式 $a_n=a_{n-1}+a_{n-3}$ が成り立つから

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3$ より

$a_4=a_3+a_1=4$　$a_5=a_4+a_2=6$　$a_6=a_5+a_3=9$　$a_7=a_6+a_4=13$　$a_8=a_7+a_5=19$

$a_9=a_8+a_6=28$　$a_{10}=a_9+a_7=41$　$a_{11}=a_{10}+a_8=60$　$a_{12}=a_{11}+a_9=88$

$a_{13}=a_{12}+a_{10}=129$　$a_{14}=a_{13}+a_{11}=189$　$a_{15}=a_{14}+a_{12}=277$

したがって　$\therefore 277$ 通り　……(答)