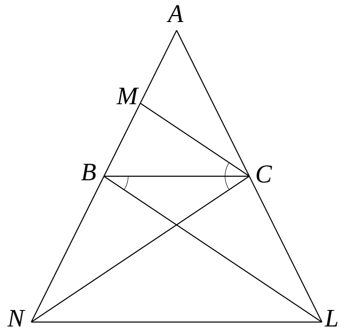
2008年京大理甲$\boxed{3}$文$\boxed{2}$共通

(解答1)



右図の通り、ACの延長上にも、$AL:LC=2:1$となるように、点Lをとる。

対称性から、$AB:BN=1:1$であり、$AC:CL=1:1$である。

$AM:MB=1:1$であるから、$MC \mathbin{/\!/} BL$である。

したがって、$\angle BCM=\angle CBL$がわかる。

対称性から$\angle BCN=\angle CBL$であるから　$\therefore \angle BCM=\angle BCN$　(証明終)

(解答2)

$\overrightarrow{CM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ である。$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=l,\ \angle BAC=\theta$とすると

$$\left|\overrightarrow{CM}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\frac{1}{4}l^2-l^2\cos\theta+l^2=\left(\frac{5}{4}-\cos\theta\right)l^2$$

$$\left|\overrightarrow{CN}\right|^2=4\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=4l^2-4l^2\cos\theta+l^2=(5-4\cos\theta)l^2$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{CN}\right|^2=4\left|\overrightarrow{CM}\right|^2 \qquad \therefore \left|\overrightarrow{CN}\right|=2\left|\overrightarrow{CM}\right|$$

したがって、$MB:BN=CM:CN=1:2$であるから　$\therefore \angle BCM=\angle BCN$　(証明終)