

2008 年京大理甲 2 乙 2 共通

$n \leq 2$ のとき、すべての頂点に点 P が現れることはないから、確率は 0。

$n \geq 3$ のとき

点 P が頂点 B に現れない確率 p_n を考える。点 P が頂点 A, C, D のいずれにあるときも、頂点 B 以外の

2 頂点のいずれかに動くから $p_{n+1} = \frac{2}{3} p_n$ $p_1 = \frac{2}{3}$ であるから $\therefore p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

対称性より、点 P が頂点 C に現れない確率、頂点 D に現れない確率も、 $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ である。

点 P が頂点 A, B だけに現れる確率 q_n を考える。点 P が頂点 A にあれば頂点 B に、頂点 B にあれば頂点 A に

動くから $q_{n+1} = \frac{1}{3} q_n$ $q_1 = \frac{1}{3}$ であるから $\therefore q_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

対称性より、点 P が頂点 A, C だけに現れる確率、頂点 A, D だけに現れる確率も、 $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ である。

4 頂点 A, B, C, D のうち、少なくとも 1 つに点 P が現れない確率は $3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

余事象により、4 頂点 A, B, C, D のすべてに点 P が現れる確率は $1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$n=1$ のとき $1 - 2 + 1 = 0$ $n=2$ のとき $1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 0$ したがって、 $n=1, 2$ でも成立。

以上により、求める確率は $\therefore 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ……(答)