

2008年京大理甲[4]文[3]共通

$$x^2 + ax + 1 = 0 \text{ ---①} \quad 3x^2 + ax - 3 = 0 \text{ ---②}$$

①について $D = a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$ であるから
 $-2 < a < 2$ のとき $D < 0$ であり、①の実数解は0個。
 $a = \pm 2$ のとき $D = 0$ であり、①の実数解は1個。
 $a < -2, 2 < a$ のとき $D > 0$ であり、①の実数解は2個。

②について $D = a^2 + 36 > 0$ であるから、②は常に2個の実数解を持つ。

①と②が共通の実数解を持つ場合を考える。②-①より $2x^2 - 4 = 0 \quad \therefore x^2 - 2 = 0 \text{ ---③}$
①と②の共通の実数解は、③の実数解でもあるから、共通解としてあり得るのは $\therefore x = \pm\sqrt{2}$

$$x = \sqrt{2} \text{ を①に代入すると } 2 + \sqrt{2}a + 1 = 0 \quad \therefore a = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{①は } x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}x + 1 = (x - \sqrt{2})\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \quad \therefore x = \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{②は } 3x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}x - 3 = 3(x - \sqrt{2})\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \quad \therefore x = \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ を①に代入すると } 2 - \sqrt{2}a + 1 = 0 \quad \therefore a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{①は } x^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}x + 1 = (x + \sqrt{2})\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \quad \therefore x = -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{②は } 3x^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}x - 3 = 3(x + \sqrt{2})\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \quad \therefore x = -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$2 < \frac{3}{2}\sqrt{2}$ であるから、以上まとめると

$-2 < a < 2$ のとき 2 個、 $a = \pm 2, \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$ のとき 3 個、 $a < -2, 2 < a$ かつ $a \neq \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$ のとき 4 個 ……(答)

2008 年京大理乙 4

$|2x^2 + ax - 1| = |x^2 - 2|$ とすると $2x^2 + ax - 1 = \pm(x^2 - 2)$ 以下の 2 式を得る。

$$x^2 + ax + 1 = 0 \text{ ---①} \quad 3x^2 + ax - 3 = 0 \text{ ---②}$$

①について $D = a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$ であるから

$-2 < a < 2$ のとき $D < 0$ であり、①の実数解は 0 個。

$a = \pm 2$ のとき $D = 0$ であり、①の実数解は 1 個。

$a < -2, 2 < a$ のとき $D > 0$ であり、①の実数解は 2 個。

②について $D = a^2 + 36 > 0$ であるから、②は常に 2 個の実数解を持つ。

①と②が共通の実数解を持つ場合を考える。②-①より $2x^2 - 4 = 0 \therefore x^2 - 2 = 0$ ---③

①と②の共通の実数解は、③の実数解でもあるから、共通解としてあり得るのは $\therefore x = \pm\sqrt{2}$

$$x = \sqrt{2} \text{ を①に代入すると } 2 + \sqrt{2}a + 1 = 0 \therefore a = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{①は } x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}x + 1 = (x - \sqrt{2})\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \therefore x = \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{②は } 3x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}x - 3 = 3(x - \sqrt{2})\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \therefore x = \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ を①に代入すると } 2 - \sqrt{2}a + 1 = 0 \therefore a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{①は } x^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}x + 1 = (x + \sqrt{2})\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \therefore x = -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{②は } 3x^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}x - 3 = 3(x + \sqrt{2})\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \therefore x = -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$2 < \frac{3}{2}\sqrt{2}$ であるから、以上まとめると

$-2 < a < 2$ のとき 2 個、 $a = \pm 2, \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$ のとき 3 個、 $a < -2, 2 < a$ かつ $a \neq \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$ のとき 4 個 …… (答)

※結局、甲 4 と同じである。定数分離すると面倒になる。