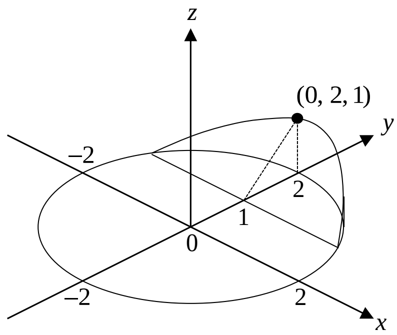
2008 年京大理甲 $\boxed{5}$ 乙 $\boxed{5}$ 共通

体積を求める立体の、平面 $x=t$ $(-\sqrt{3}\leqq t\leqq\sqrt{3})$ による断面を考える。

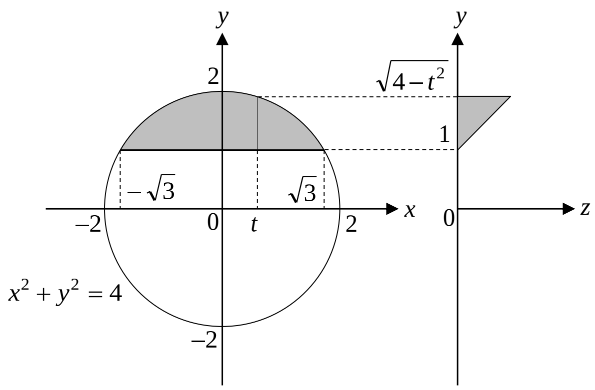


このとき、断面積 $S(t)$ は、一辺の長さが $\sqrt{4-t^2}-1$ の正方形の面積の半分であるから

$$S(t)=\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2}-1)^2=\frac{1}{2}(4-t^2-2\sqrt{4-t^2}+1)=\frac{1}{2}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2})$$

求める体積は

$$V=\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2})dt=\int_0^{\sqrt{3}}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2})dt$$



$$\int_0^{\sqrt{3}}(5-t^2)dt=\left[5t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}-\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

（解答 1）

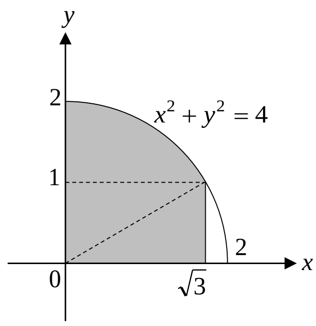
$t=2\sin\theta$ とおくと　$dt=2\cos\theta d\theta$　$\begin{array}{c|c} t & 0\to\sqrt{3} \\ \hline \theta & 0\to\dfrac{\pi}{3}\end{array}$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

（解答 2）

$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt$ は、右図の斜線部の面積に等しいから



$$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1=\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上により　$\therefore V=4\sqrt{3}-2\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$　……（答）

※ y 軸に垂直な断面を考えても解ける。