

2009 年京大理甲 3 文 3 共通

真数条件および底の条件より $x > 0, y > 0$

$$\log_x y + \log_y x = \frac{\log y}{\log x} + \frac{\log x}{\log y} \quad (\log_x 2)(\log_y 2) = \frac{(\log 2)^2}{(\log x)(\log y)}$$

$$X = \log x, Y = \log y \text{ とおくと、 } X \neq 0, Y \neq 0 \text{ であるから } \frac{Y}{X} + \frac{X}{Y} > 2 + \frac{(\log 2)^2}{XY}$$

両辺に $X^2 Y^2$ をかけると

$$XY(X^2 + Y^2) > 2X^2 Y^2 + (\log 2)^2 XY \quad XY\{X^2 + Y^2 - 2XY - (\log 2)^2\} > 0$$

$$XY\{(Y - X)^2 - (\log 2)^2\} > 0 \quad XY(Y - X + \log 2)(Y - X - \log 2) > 0$$

$$XY > 0 \text{ のとき } (Y - X + \log 2)(Y - X - \log 2) > 0 \quad \therefore Y < X - \log 2, X + \log 2 < Y$$

$$XY < 0 \text{ のとき } (Y - X + \log 2)(Y - X - \log 2) < 0 \quad \therefore X - \log 2 < Y < X + \log 2$$

$$XY > 0 \Leftrightarrow X < 0, Y < 0 \text{ または } X > 0, Y > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1, 0 < y < 1 \text{ または } x > 1, y > 1$$

$$XY < 0 \Leftrightarrow X > 0, Y < 0 \text{ または } X < 0, Y > 0 \Leftrightarrow x > 1, 0 < y < 1 \text{ または } 0 < x < 1, y > 1$$

$$Y < X - \log 2, X + \log 2 < Y \Leftrightarrow \log y < \log \frac{x}{2}, \log 2x < \log y \Leftrightarrow y < \frac{x}{2}, 2x < y$$

$$\text{同様に } X - \log 2 < Y < X + \log 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} < y < 2x$$

これらを図示すると、右図の通り。

境界線は含まない。

