2009年京大理甲$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

真数条件および底の条件より　$x>0,\ y>0$

$$\log_x y+\log_y x=\frac{\log y}{\log x}+\frac{\log x}{\log y}\qquad (\log_x 2)(\log_y 2)=\frac{(\log 2)^2}{(\log x)(\log y)}$$

$X=\log x,\ Y=\log y$ とおくと、$X\neq 0,\ Y\neq 0$ であるから　$\dfrac{Y}{X}+\dfrac{X}{Y}>2+\dfrac{(\log 2)^2}{XY}$

両辺に X^2Y^2 をかけると

$$XY(X^2+Y^2)>2X^2Y^2+(\log 2)^2XY\qquad XY\left\{X^2+Y^2-2XY-(\log 2)^2\right\}>0$$

$$XY\left\{(Y-X)^2-(\log 2)^2\right\}>0\qquad XY(Y-X+\log 2)(Y-X-\log 2)>0$$

$XY>0$ のとき　$(Y-X+\log 2)(Y-X-\log 2)>0$　$\therefore Y<X-\log 2,\ X+\log 2<Y$

$XY<0$ のとき　$(Y-X+\log 2)(Y-X-\log 2)<0$　$\therefore X-\log 2<Y<X+\log 2$

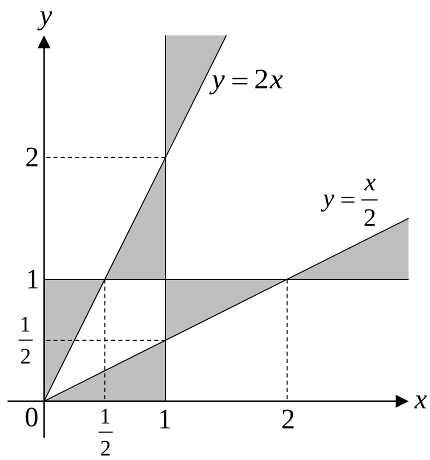
$XY>0 \ \Leftrightarrow\ X<0,\ Y<0$ または $X>0,\ Y>0 \ \Leftrightarrow\ 0<x<1,\ 0<y<1$ または $x>1,\ y>1$

$XY<0 \ \Leftrightarrow\ X>0,\ Y<0$ または $X<0,\ Y>0 \ \Leftrightarrow\ x>1,\ 0<y<1$ または $0<x<1,\ y>1$

$Y<X-\log 2,\ X+\log 2<Y \ \Leftrightarrow\ \log y<\log\dfrac{x}{2},\ \log 2x<\log y \ \Leftrightarrow\ y<\dfrac{x}{2},\ 2x<y$

同様に　$X-\log 2<Y<X+\log 2 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{x}{2}<y<2x$

これらを図示すると、右図の通り。
境界線は含まない。



2009年京大理乙$\boxed{3}$

n回の試行中、$n-1$回は、一番上のカードを番号nのカードより下に入れる。
残り 1 回は、一番上に戻すか、番号nのカードより上に入れる。

番号nのカードが、下から数えてk番目$(1 \leqq k \leqq n-1)$にあるとき

一番上のカードを番号nのカードより下に入れる確率は$\dfrac{k}{n}$。

一番上のカードを一番上に戻すか、番号nのカードより上に入れる確率は$\dfrac{n-k}{n}$。

$n-1$回の試行を終え、番号nのカードが一番上にあるとき

n回目に一番上のカードを一番上に戻す確率は$\dfrac{1}{n}$。

求める確率は

$$\therefore \left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}\cdot\left\{\frac{n(n-1)}{2}+1\right\}\cdot\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$$

$$=\frac{(n^2-n+2)(n-1)!}{2n^n} \quad \cdots\cdots(答)$$