2009年京大理甲 $\boxed{4}$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ より、$a^2 + c^2 = 1$ であるから、$a = \cos\theta,\ c = \sin\theta$ とおける。

$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & b \\ \sin\theta & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + b\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta + d\sin\theta \end{pmatrix}$ より　$x_3{}^2 + y_3{}^2 = (\cos^2\theta + b\sin\theta)^2 + \sin^2\theta(\cos\theta + d)^2$

$ad - bc = 1$ より　$d\cos\theta - b\sin\theta = 1$　$b\sin\theta = d\cos\theta - 1$

$$\begin{aligned} x_3{}^2 + y_3{}^2 &= (\cos^2\theta + d\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta(\cos\theta + d)^2 = (d\cos\theta - \sin^2\theta)^2 + \sin^2\theta(\cos\theta + d)^2 \\ &= d^2\cos^2\theta - 2d\sin^2\theta\cos\theta + \sin^4\theta + \sin^2\theta(\cos^2\theta + 2d\cos\theta + d^2) \\ &= d^2 + \sin^2\theta = 1 \end{aligned}$$

$d^2 = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$　$\therefore d = \pm\cos\theta$

$d = \cos\theta$ のとき　$b\sin\theta = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$

$\sin\theta \neq 0$ のとき　$\therefore b = -\sin\theta$　$\therefore A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$　$\sin\theta = 0$ の場合も含まれる。

このとき、A は原点中心の回転行列を表し、$n \geqq 2$ のとき $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta \end{pmatrix}$ であるから、

すべての n について $x_n{}^2 + y_n{}^2 = 1$ が成り立つ。

$d = -\cos\theta$ のとき　$b\sin\theta = -\cos^2\theta - 1 \leqq -1$　$\sin\theta = 0$ は明らかに不適。このとき、$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから

$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & b \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & b \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

したがって、以下帰納的に、$k \geqq 1$ として

$n = 4k - 3$ のとき $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$n = 4k - 2$ のとき $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$、

$n = 4k - 1$ のとき $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$n = 4k$ のとき $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$

であるから、すべての n について $x_n{}^2 + y_n{}^2 = 1$ が成り立つ。

以上により、いずれにしても、すべての n について $x_n{}^2 + y_n{}^2 = 1$ が成り立つ。（証明終）

2009年京大理乙 $\boxed{4}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ より、$\left|\overrightarrow{OP_1}\right| = a^2 + c^2 = 1$ であるから、$a = \cos\theta,\ c = \sin\theta$ とおける。

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & b \\ \sin\theta & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + b\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta + d\sin\theta \end{pmatrix}$ より　$\left|\overrightarrow{OP_2}\right| = {x_2}^2 + {y_2}^2 = (\cos^2\theta + b\sin\theta)^2 + \sin^2\theta(\cos\theta + d)^2$

$ad - bc = 1$ より　$d\cos\theta - b\sin\theta = 1$　$b\sin\theta = d\cos\theta - 1$

$$\begin{aligned} {x_2}^2 + {y_2}^2 &= (\cos^2\theta + d\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta(\cos\theta + d)^2 = (d\cos\theta - \sin^2\theta)^2 + \sin^2\theta(\cos\theta + d)^2 \\ &= d^2\cos^2\theta - 2d\sin^2\theta\cos\theta + \sin^4\theta + \sin^2\theta(\cos^2\theta + 2d\cos\theta + d^2) \\ &= d^2 + \sin^2\theta = 1 \end{aligned}$$

$d^2 = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$　$\therefore d = \pm\cos\theta$

$d = \cos\theta$ のとき　$b\sin\theta = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$

$\sin\theta \neq 0$ のとき　$\therefore b = -\sin\theta$　$\therefore A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$　$\sin\theta = 0$ の場合も含まれる。

このとき、A は原点中心の回転行列を表し、$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$ であるから、

すべての n について $\left|\overrightarrow{OP_n}\right| = {x_n}^2 + {y_n}^2 = 1$ が成り立つ。

$d = -\cos\theta$ のとき　$b\sin\theta = -\cos^2\theta - 1 \leqq -1$　$\sin\theta = 0$ は明らかに不適。このとき、$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから

$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & b \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & b \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

したがって、以下帰納的に、$k \geqq 1$ として

$n = 4k$ のとき $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$n = 4k - 3$ のとき $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$、

$n = 4k - 2$ のとき $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$n = 4k - 1$ のとき $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$

であるから、すべての n について $\left|\overrightarrow{OP_n}\right| = {x_n}^2 + {y_n}^2 = 1$ が成り立つ。

以上により、いずれにしても、すべての n について $\left|\overrightarrow{OP_n}\right| = {x_n}^2 + {y_n}^2 = 1$ が成り立つ。（証明終）

※甲 $\boxed{4}$ との違いは、n の値が1ずれているだけである。