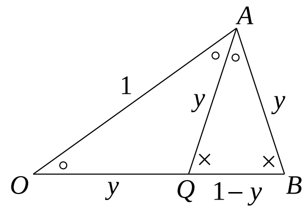
2010年京大文 $\boxed{4}$

$OA=OB=1$ とする。$\angle AOB=36^\circ$ である。

$OP=x\ (0<x<1)$ とすると、$OB=1,\ PB=1-x$ であるから、$OP^2=OB\cdot PB$ より

$$x^2=1-x \qquad x^2+x-1=0 \qquad \therefore x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

（解答1）



$AB=y$ とする。$\angle A$ の二等分線と、OB の交点を Q とする。

$\angle ABQ=\angle AQB=72^\circ$ であるから　$\therefore AB=AQ=y$

$\angle QAO=\angle QOA=36^\circ$ であるから　$\therefore QA=QO=y$

したがって、$QB=1-y$ である。$\triangle OAB \backsim \triangle ABQ$ であるから

$$OA:AB=AB:BQ \qquad 1:y=y:1-y \qquad y^2=1-y \qquad y^2+y-1=0 \qquad \therefore y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

以上により $P=Q$ であり、$x=y$、すなわち $OP=AB$ が示された。（証明終）

（解答2）

$AB=2\sin 18^\circ$ である。$\theta=18^\circ$ とすると　$5\theta=90^\circ$　$3\theta=90^\circ-2\theta$

両辺の正弦をとると　$\sin 3\theta=\sin(90^\circ-2\theta)=\cos 2\theta$

$$\sin 3\theta=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$$

$$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$$

$z=\sin\theta\ (0<z<1)$ とすると

$$3z-4z^3=1-2z^2 \qquad 4z^3-2z^2-3z+1=0 \qquad (z-1)(4z^2+2z-1)=0$$

$$4z^2+2z-1=0 \qquad \therefore z=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$AB=2z=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ であるから、$OP=AB$ が示された。（証明終）

※余弦定理より、$AB^2=2-2\cos 36^\circ$ であるから、$\cos 36^\circ$ を求めてもよい。

　相似性を利用するにしろ、三倍角の公式を利用するにしろ、類題経験があると有利。