2010年京大文 $\boxed{5}$

(1)

線分 OF 上の点 $P(t,\ t,\ t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ を考える。$OP=\sqrt{3}t$ である。

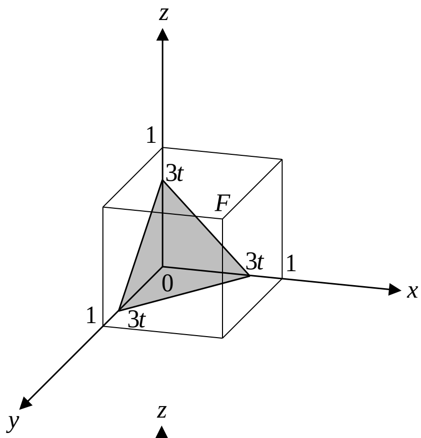
P を通り、OF に垂直な平面 α の方程式は、$x+y+z=3t$ で与えられる。

α が点 $A(1,\ 0,\ 0)$ を通るとき　$1+0+0=3t$　　$\therefore t=\dfrac{1}{3}$

求める長さは、このときの PA の長さであるから　$\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{6}{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　……(答)

(2)

対称性より、$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲で考える。

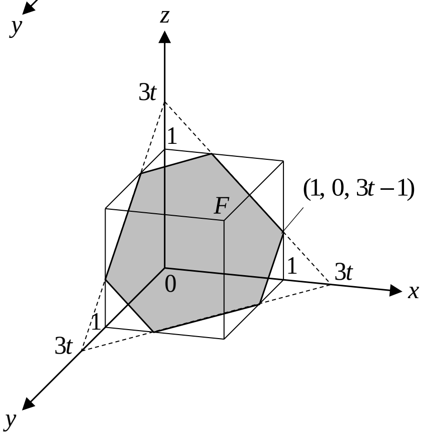


$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき

平面 α による立方体の断面は、正三角形になる。

この1つの頂点 $(3t,\ 0,\ 0)$ と、P との距離は　$\sqrt{(3t-t)^2+t^2+t^2}=\sqrt{6}t$

平面 α による回転体の断面積は　$S(t)=6\pi t^2$



$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

平面 α による立方体の断面は、六角形になる。

この1つの頂点 $(1,\ 0,\ 3t-1)$ と、P との距離は

$$\sqrt{(1-t)^2+t^2+(2t-1)^2}=\sqrt{6t^2-6t+2}$$

平面 α による回転体の断面積は　$S(t)=\pi(6t^2-6t+2)$

求める体積は

$$\therefore 2\int_0^{\frac{1}{2}} S(t)\cdot\sqrt{3}\,dt=12\sqrt{3}\pi\int_0^{\frac{1}{3}} t^2\,dt+2\sqrt{3}\pi\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}(6t^2-6t+2)\,dt=4\sqrt{3}\pi\Big[t^3\Big]_0^{\frac{1}{3}}+2\sqrt{3}\pi\Big[2t^3-3t^2+2t\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=4\sqrt{3}\pi\cdot\frac{1}{27}+2\sqrt{3}\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+1-\frac{2}{27}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi+2\sqrt{3}\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{11}{27}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi+\frac{5\sqrt{3}}{27}\pi=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$　……(答)

※(2)は理系甲 $\boxed{6}$ と共通問題で、1993年東工大後期 $\boxed{1}$ と同一問題。