2010 年京大理甲 $\boxed{1}$ 文 $\boxed{3}$ 共通

条件より、1 番目と 2 番目の数の和と、4 番目と 5 番目の数の和が等しい。

$1+2+3+4+5=15$ であり、3 番目の数を除く 4 数の和は偶数であるから、3 番目の数は奇数である。

3 番目の数が「1」であるとき

他の 4 数を和が等しい 2 組にわけると、(2, 5) と (3, 4) である。

これらの組を前後どちらに置くかが 2 通り、各組内の順序がそれぞれ 2 通りであるから

3 番目の数が「1」である並べ方は、$2\times2\times2=8$ 通り。

3 番目の数が「3」であるとき

他の 4 数を和が等しい 2 組にわけると、(2, 4) と (1, 5) である。

同様に考えて、3 番目の数が「3」である並べ方は、8 通り。

3 番目の数が「5」であるとき

他の 4 数を和が等しい 2 組にわけると、(2, 3) と (1, 4) である。

同様に考えて、3 番目の数が「5」である並べ方は、8 通り。

題意を満たす 5 数の並べ方は、$3\times8=24$ 通り。

すべての並べ方は、$5!=120$ 通りであるから、求める確率は　$\therefore \dfrac{24}{120}=\dfrac{1}{5}$ ……(答)

2010年京大理甲$\boxed{2}$乙$\boxed{1}$共通

空間座標系において、Aを始点とした位置ベクトルを考えると

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$より　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=0$ ――①

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$より　$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=0$ ――②

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$より　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ――③

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}$であるから、$2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$であればよい。

$$2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

①より$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$、②より$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$、③より$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$であるから

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\quad\therefore\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$$

以上により示された。（証明終）