2011 年京大文 $\boxed{5}$

(1)

各桁の数が 1 か 2 である n 桁の整数は、2^n 個存在する。

これら 2^n 個の整数の各桁に現れる、1 の個数と 2 の個数は等しい。すなわち、2^{n-1} 個ずつ現れるから

$$\therefore T_n = (1\times 2^{n-1} + 2\times 2^{n-1})\times(10^{n-1}+\cdots+10+1) = 3\cdot 2^{n-1}\times\frac{10^n-1}{10-1} = \frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}(10^n-1) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$k \geqq 2$ のとき

各桁の数が 0 か 1 か 2 である k 桁の整数は、最上位の桁は 1 か 2 であるから、$2\cdot 3^{k-1}$ 個存在する。

これら $2\cdot 3^{k-1}$ 個の整数において、最上位の桁に現れる 1 の個数と 2 の個数は等しく、最上位以外の桁に現れる 0 の個数と 1 の個数と 2 の個数は等しい。(1) と同様に考え、これら $2\cdot 3^{k-1}$ 個の整数の和は

$$\therefore a_k = (1\times 3^{k-1} + 2\times 3^{k-1})\times 10^{k-1} + (1\times 2\cdot 3^{k-2} + 2\times 2\cdot 3^{k-2})\times(10^{k-2}+\cdots+10+1)$$

$$= 3^k\times 10^{k-1} + 2\cdot 3^{k-1}\times\frac{10^{k-1}-1}{10-1} = 3\cdot 30^{k-1} + \frac{2}{9}\cdot(30^{k-1}-3^{k-1}) = \frac{29}{9}\cdot 30^{k-1} - \frac{2}{9}\cdot 3^{k-1}$$

$k=1$ のとき $a_1 = 3$ であるから、$k=1$ でも成立。

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{29}{9}\cdot\frac{30^n-1}{30-1} - \frac{2}{9}\cdot\frac{3^n-1}{3-1} = \frac{1}{9}(30^n-1) - \frac{1}{9}(3^n-1) = \frac{1}{9}(30^n-3^n) = 3^{n-2}(10^n-1)$$

$S_n \geqq 15T_n$ のとき　$3^{n-2}(10^n-1) \geqq 5\cdot 2^{n-1}(10^n-1) = 10\cdot 2^{n-2}(10^n-1)$　$\therefore 3^{n-2} \geqq 10\cdot 2^{n-2}$

両辺の常用対数をとると

$$(n-2)\log_{10}3 \geqq 1 + (n-2)\log_{10}2 \qquad (n-2)(\log_{10}3 - \log_{10}2) \geqq 1 \qquad \therefore n \geqq \frac{1}{\log_{10}3 - \log_{10}2} + 2$$

$0.301 < \log_{10}2 < 0.302,\ 0.477 < \log_{10}3 < 0.478$ より、$0.175 < \log_{10}3 - \log_{10}2 < 0.177$ であるから

$$n > \frac{1}{0.175} + 2 = 5.7\cdots + 2 = 7.7\cdots \qquad \therefore n \geqq 8 \text{ のとき} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$