

2011 年京大理 ③

$$f(x) = \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2 = \frac{3}{4}|x^2 - 4| - 2 \text{ とすると}$$

$$x^2 - 4 \geq 0 \quad x \leq -2, 2 \leq x \text{ のとき} \quad f(x) = \frac{3}{4}(x^2 - 4) - 2 = \frac{3}{4}x^2 - 5$$

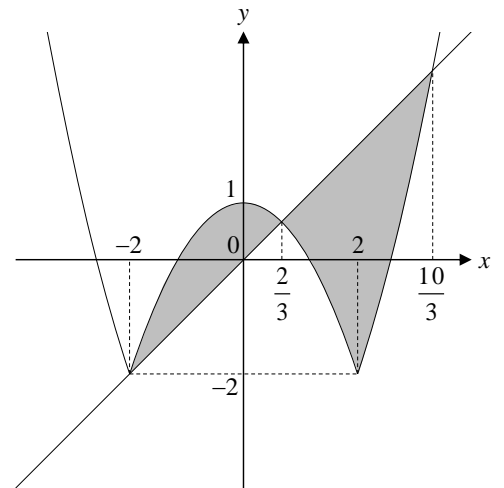
$$x^2 - 4 < 0 \quad -2 < x < 2 \text{ のとき} \quad f(x) = \frac{3}{4}(-x^2 + 4) - 2 = -\frac{3}{4}x^2 + 1$$

$y = x$ のグラフと、 $y = f(x)$ のグラフの、交点の x 座標を求める。

$$x \leq -2, 2 \leq x \text{ のとき} \quad \frac{3}{4}x^2 - 5 = x \quad 3x^2 - 4x - 20 = 0 \quad (3x - 10)(x + 2) = 0 \quad x = -2, \frac{10}{3}$$

$$-2 < x < 2 \text{ のとき} \quad -\frac{3}{4}x^2 + 1 = x \quad 3x^2 + 4x - 4 = 0 \quad (3x - 2)(x + 2) = 0 \quad x = \frac{2}{3}$$

$y = x$ のグラフと、 $y = f(x)$ のグラフで囲まれる図形は、
右図のようになる。



求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^{\frac{2}{3}} \left(-\frac{3}{4}x^2 + 1 - x \right) dx + \int_{\frac{2}{3}}^2 \left(x + \frac{3}{4}x^2 - 1 \right) dx + \int_2^{\frac{10}{3}} \left(x - \frac{3}{4}x^2 + 5 \right) dx \\ &= -\frac{3}{4} \int_{-2}^{\frac{2}{3}} (x+2) \left(x - \frac{2}{3} \right) dx + \left[\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} - x \right]_{\frac{2}{3}}^2 + \left[-\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + 5x \right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{10}{3}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{8}{3} \right)^3 + \left(2 + 2 - 2 - \frac{2}{27} - \frac{2}{9} + \frac{2}{3} \right) \\ & \quad + \left(-\frac{250}{27} + \frac{50}{9} + \frac{50}{3} + 2 - 2 - 10 \right) \\ &= \frac{64}{27} + \left(2 + \frac{10}{27} \right) + \left(\frac{350}{27} - 10 \right) = \frac{424}{27} - 8 \\ &= \frac{208}{27} \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$