2012年京大文 $\boxed{5}$

$\cos a\theta = \cos b\theta$ のとき　$2\sin\dfrac{a+b}{2}\theta\sin\dfrac{a-b}{2}\theta = 0$

$a \neq b,\ a+b>0$ であるから、m, n を非負整数として、$\dfrac{a+b}{2}\theta = m\pi$ または $\dfrac{a-b}{2}\theta = \pm n\pi$

$\dfrac{a+b}{2}\theta = m\pi$ のとき　$\theta = \dfrac{2m\pi}{b+a}$　このような θ がただ1つ存在するには

$\dfrac{2(m-1)\pi}{b+a} \leqq 0 < \dfrac{2m\pi}{b+a} \leqq \pi < \dfrac{2(m+1)\pi}{b+a}$　　$2m-2 \leqq 0 < 2m \leqq b+a < 2m+2$

$m=1$ しかあり得ないから　$\therefore -a+2 \leqq b < -a+4$ ——①

$\dfrac{a-b}{2}\theta = \pm n\pi$ のとき　$a-b>0$ ならば $\theta = \dfrac{2n\pi}{a-b}$　$a-b<0$ ならば $\theta = \dfrac{2n\pi}{b-a}$

このような θ がただ1つ存在するには

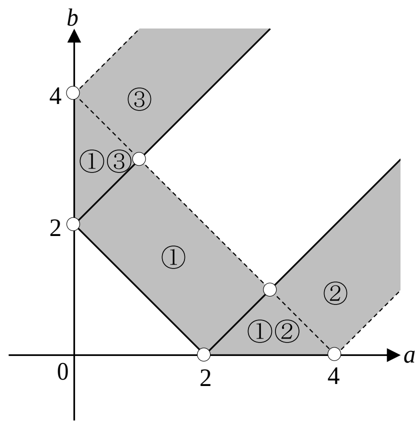
$a-b>0$ のとき　$\dfrac{2(n-1)\pi}{a-b} \leqq 0 < \dfrac{2n\pi}{a-b} \leqq \pi < \dfrac{2(n+1)\pi}{a-b}$　　$2n-2 \leqq 0 < 2n \leqq a-b < 2n+2$

$n=1$ しかあり得ないから　$\therefore a-4 < b \leqq a-2$ ——②

$b-a>0$ のとき　$\dfrac{2(n-1)\pi}{b-a} \leqq 0 < \dfrac{2n\pi}{b-a} \leqq \pi < \dfrac{2(n+1)\pi}{b-a}$　　$2n-2 \leqq 0 < 2n \leqq b-a < 2n+2$

$n=1$ しかあり得ないから　$\therefore a+2 \leqq b < a+4$ ——③

①または②または③を図示すると、右図の通り。



②か③だけを満たす領域では、$\sin\dfrac{a-b}{2}\theta = 0$ を満たす θ は1個だが、

$\sin\dfrac{a+b}{2}\theta = 0$ を満たす θ が2個以上存在する。

①と②、または①と③の共通領域では、$\sin\dfrac{a-b}{2}\theta = 0$ を満たす θ と

$\sin\dfrac{a+b}{2}\theta = 0$ を満たす θ が1個ずつ、合計2個存在する。

結局、題意を満たす領域は、①の領域から、①と②および①と③の共通領域を除いた部分であり、右図の通り。
境界線は実線部のみ含み、点 $(0, 2), (1, 1), (2, 0)$ は除く。
また、直線 $b=a$ 上の点も除く。