2012年京大理 $\boxed{4}$

(1)

$\sqrt[3]{2}$ は有理数と仮定すると、 p, q を互いに素な自然数として、$\sqrt[3]{2}=\dfrac{q}{p}$ とおける。

このとき、$q^3=2p^3$ であり、q^3 は偶数であるから q は偶数。

$q=2q'$ とおくと　$8q'^3=2p^3$　$p^3=4q'^3$

このとき、 p^3 は偶数であるから p は偶数であるが、 p, q が互いに素であることに矛盾する。

したがって、$\sqrt[3]{2}$ は無理数である。(証明終)

(2)

$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ とおく。 $Q(x)$ の各係数および a, b, c は有理数である。

$\alpha=\sqrt[3]{2}$ とする。 $P(\alpha)=0$ であるとき　$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ ――①
①の両辺に α をかけると　$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha=0$　$\therefore 2a+b\alpha^2+c\alpha=0$ ――②
②× a －①× b より　$2a^2+ca\alpha-b^2\alpha-bc=0$　$2a^2-bc=(b^2-ca)\alpha$

ここで、$b^2-ca\neq 0$ のとき、$\alpha=\dfrac{2a^2-bc}{b^2-ca}$ であるが、右辺は有理数、左辺は無理数であるから、不適。

したがって、$b^2-ca=0$ であり、$2a^2-bc=0$ であるから　$\therefore 2a^3-abc=2a^3-b^3=0$

$a\neq 0$ のとき、$2=\dfrac{b^3}{a^3}$ 、$\sqrt[3]{2}=\alpha=\dfrac{b}{a}$ であるが、右辺は有理数、左辺は無理数であるから、不適。

したがって、 $a=0$ であるから、 $b=0$ であり、 $c=0$。

以上により、 a, b, c は有理数かつ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ ならば、 $a=b=c=0$ が示されたので、

$P(x)$ は x^3-2 で割り切れる。(証明終)