2012年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=6$ より　$xy=(x+y)^2-6$

$$\begin{aligned}x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y&=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)\\&=(x+y)^3-6(x+y)-(x+y)^2+(x+y)\\&=(x+y)^3-(x+y)^2-5(x+y)\end{aligned}$$

$x+y$ が取り得る範囲を調べる。$x+y=k$ とおき、$y=k-x$ を $x^2+xy+y^2=6$ に代入すると

$x^2+x(k-x)+(k-x)^2=x^2-kx+k^2=6$　$x^2-kx+k^2-6=0$ ――①

x に関する二次方程式①が、実数解を持つので

$D=k^2-4(k^2-6)=24-3k^2=3(8-k^2)\geqq 0$　$\therefore -2\sqrt{2}\leqq k\leqq 2\sqrt{2}$ ――②

②の範囲で、$f(k)=k^3-k^2-5k$ の増減を調べる。　$f'(k)=3k^2-2k-5=(3k-5)(k+1)$

$f(k)$ の増減は右の通り。

$f(-1)=-1-1+5=3$　$f\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{125}{27}-\dfrac{25}{9}-\dfrac{25}{3}=-\dfrac{175}{27}$

$f(-2\sqrt{2})=-16\sqrt{2}-8+10\sqrt{2}=-8-6\sqrt{2}$

$f(2\sqrt{2})=16\sqrt{2}-8-10\sqrt{2}=-8+6\sqrt{2}$

k	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(k)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(k)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$-8-6\sqrt{2}<-\dfrac{175}{27},\ -8+6\sqrt{2}<3$ であるから、求める範囲は

$\therefore -8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$　……(答)