

2013 年京大文 ③

(1)

$x^n = (x-k)(x-k-1)Q(x) + ax+b$ とおけるので $k^n = ka+b, (k+1)^n = (k+1)a+b$
 a, b について解くと $a = (k+1)^n - k^n, b = k^n - ka = k^n - k(k+1)^n + k^{n+1}$
 n, k は自然数であるから、 a, b は整数である。(証明終)

(2)

a と b の最大公約数を l とし、 $a = a'l, b = b'l$ とすると、(1) より

$ka+b = (ka'+b')l = k^n, (k+1)a+b = \{(k+1)a'+b'\}l = (k+1)^n$
 k^n と $(k+1)^n$ は、共に l で割り切れる。

ここで、 p, q, m を自然数とし、 $k = pm, k+1 = qm$ とすると

$$pm+1 = qm \quad (q-p)m = 1$$

$m=1, q=p+1$ しかあり得ないので、 k と $k+1$ は互いに素である。

したがって、 k^n と $(k+1)^n$ も互いに素であるから、 $l=1$ しかあり得ない。

a と b の最大公約数は1であるから、 a と b を共に割り切る素数は存在しない。(証明終)