2013 年京大文 $\boxed{4}$

(1)

円 C の方程式を、$x^2+(y-3)^2=r^2$ とすると、$P(\sqrt{3},\ 0)$ を通るので　$\therefore r^2=3+3^2=12$

放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ は、$P(\sqrt{3},\ 0)$ を通るので　$0=-\dfrac{3}{3}+\sqrt{3}\alpha-\beta$　$\therefore \beta=\sqrt{3}\alpha-1$ ――①

この放物線の P における接線 l の傾きは、$y'=-\dfrac{2}{3}x+\alpha$ より、$-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}+\alpha$ である。

点 $(0,\ 3)$ と P を通る直線の傾きは $-\sqrt{3}$ であるから、l の傾きは $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ に等しい。

$-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}+\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　①より　$\therefore \alpha=\sqrt{3},\ \beta=2$ ……(答)

(2)

放物線の方程式は　$y=-\dfrac{x^2}{3}+\sqrt{3}x-2=-\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

図示すると右図の通りであるから、求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 3-\int_0^{\sqrt{3}}\left\{-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}dx-\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{3}+\left[\frac{1}{9}\left(x-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^3-\frac{1}{4}x\right]_0^{\sqrt{3}}-\pi$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{3}+\left(-\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{9}\cdot\frac{81}{8}\sqrt{3}\right)-\pi$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{24}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{9}{8}\sqrt{3}-\pi=\frac{7}{3}\sqrt{3}-\pi \quad \cdots\cdots(\text{答})$$