2013 年京大理 $\boxed{2}$

$a_1=2^N-3$ は奇数であるから　$a_2=\dfrac{(2^N-3)-1}{2}=2^{N-1}-2$

$N=2$ のとき

$a_2=0$ であり、定義により $n\geqq 2$ のとき $a_n=0$ である。

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n=a_1=1\leqq 2^3-2-5=1$　任意の自然数 M について成立。

$N=3$ のとき

$a_2=2^{3-1}-2=2$ は偶数であるから　$a_3=\dfrac{2}{2}=1$　$a_3=1$ は奇数であるから　$a_4=\dfrac{1-1}{2}=0$

定義により $n\geqq 4$ のとき $a_n=0$ である。

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq\sum_{n=1}^{3}a_n=a_1+a_2+a_3=8=2^4-3-5$　任意の自然数 M について成立。

$N>3$ のとき

$a_4=2^{N-3}-1$ は奇数であるから　$a_5=\dfrac{(2^{N-3}-1)-1}{2}=2^{N-4}-1$

以下、$3\leqq n\leqq N$ のとき、$a_n=2^{N+1-n}-1$ と表され、$n\geqq N+1$ のとき $a_n=0$ となることがわかる。

$$\therefore \sum_{n=1}^{M}a_n\leqq\sum_{n=1}^{N}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_N=(2^N-3)+(2^{N-1}-2)+\underbrace{(2^{N-2}-1)+\cdots+(2^2-1)+(2-1)}_{N-2\text{項}}$$

$$=2\frac{2^{N-1}-1}{2-1}-5-(N-2)=2^{N+1}-N-5$$

以上により、任意の自然数 M について　$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 2^{N+1}-N-5$　（証明終）