2013年京大理 $\boxed{3}$

x^n を x^2-2x-1 で割った余りを、a_nx+b_n とすると、$x^n=(x^2-2x-1)Q(x)+a_nx+b_n$ とおける。
両辺に x をかけると

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x(x^2-2x-1)Q(x)+a_nx^2+b_nx = x(x^2-2x-1)Q(x)+a_n\left\{(x^2-2x-1)+(2x+1)\right\}+b_nx \\ &= (x^2-2x-1)\left\{xQ(x)+a_n\right\}+(2a_n+b_n)x+a_n \end{aligned}$$

したがって、x^{n+1} を x^2-2x-1 で割った余りは $(2a_n+b_n)x+a_n$ であり、以下の漸化式が成り立つ。

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases} \quad \text{——①}$$

x を x^2-2x-1 で割った余りは x であるから　$\therefore a_1=1,\ b_1=0$
以下帰納的に、$a_n,\ b_n$ が整数であることは明らかである。

$n \geqq 2$ のとき、$a_n,\ b_n$ が公約数 m を持つとすると、$a_n=am,\ b_n=bm\ (m>0)$ と書ける。
このとき、①より $a_{n-1}=b_n,\ b_{n-1}=a_n-2b_n$ であるから　$a_{n-1}=bm,\ b_{n-1}=(a-2b)m$
したがって、$a_{n-1},\ b_{n-1}$ も公約数 m を持つ。以下帰納的に、$a_1,\ b_1$ も公約数 m を持つ。
ところが、$\therefore a_1=1,\ b_1=0$ より、$m=1$ しかあり得ない。

以上により、$a_n,\ b_n$ を共に割り切る素数は存在しない。（証明終）

※2002年東大理 $\boxed{2}$ 文 $\boxed{2}$ 共通とほぼ同じ。