2013年京大理 $\boxed{5}$

$y=\sqrt{3}\log(1+x)\ (-1<x)$ と、 $y=\sqrt{3}\log(1-x)\ (x<1)$ は、 y 軸に関して対称である。

C_1 上の点 $A(t,\ \sqrt{3}\log(1+t))\ (-1<t)$ における、C_1 の接線は　$y=\dfrac{\sqrt{3}}{1+t}(x-t)+\sqrt{3}\log(1+t)$

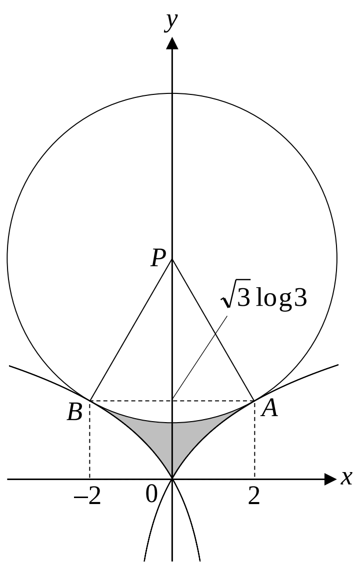
この接線と、A において直交する法線は　$y=-\dfrac{1+t}{\sqrt{3}}(x-t)+\sqrt{3}\log(1+t)$

この法線と、y 軸との交点が P であるから　$P\left(0,\ \dfrac{t(1+t)}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\log(1+t)\right)$

B は y 軸に関して A と対称であるから　$AB=2|t|$　$AB^2=AP^2$ より

$$4t^2=t^2+\frac{t^2(1+t)^2}{3}\qquad 12t^2=3t^2+t^2(1+t)^2\qquad t^2\left\{(1+t)^2-9\right\}=0$$

$t=0$ は $A=B=P$ となるので、不適。　$(1+t)^2=9$　$1+t=\pm3$　$t=-4,\ 2$　$-1<t$ より　$\therefore t=2$



$PA=PB=AB=4$ であり、$\angle APB=\dfrac{\pi}{3}$ であるから

円 C と直線 $y=\sqrt{3}\log3$ で囲まれた部分の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\sqrt{3}=\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}$$

曲線 C_1 と、x 軸、直線 $x=2$ で囲まれた部分の面積は

$$\sqrt{3}\int_0^2\log(1+x)dx=\sqrt{3}\big[(1+x)\log(1+x)-x\big]_0^2=3\sqrt{3}\log3-2\sqrt{3}$$

対称性により、求める面積は

$$4\times\sqrt{3}\log3-\left(\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}\right)-2\times(3\sqrt{3}\log3-2\sqrt{3})$$

$$=8\sqrt{3}-2\sqrt{3}\log3-\frac{8}{3}\pi\quad\cdots\cdots(答)$$

（注）

t の値は、A における法線の傾き $-\dfrac{1+t}{\sqrt{3}}$ が、$-\sqrt{3}$ に等しいことから求めてもよい。