2014 年京大文 $\boxed{1}$

$x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1=0$ ——① $x^2+2(\tan\theta)x+3=0$ ——②

2 次方程式①と②が、ともに実数解を持つ条件を考える。

$0 \leqq \theta < 90^\circ$ のとき、$0 < \cos\theta \leqq 1$ であるから

①が実数解を持つとき

$$D/4=\cos^2\theta+\cos\theta-1=\left(\cos\theta-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\cos\theta-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\geqq 0 \quad \therefore \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq\cos\theta\leqq 1 \text{ ——③}$$

②が実数解を持つとき

$$D/4=\tan^2\theta-3\geqq 0 \quad \tan\theta\geqq\sqrt{3} \quad 60^\circ\leqq\theta<90^\circ \quad \therefore 0<\cos\theta\leqq\frac{1}{2} \text{ ——④}$$

$\frac{1}{2}=\frac{-1+2}{2}<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ であるから、③かつ④となることはない。

したがって、与えられた 4 次方程式は、少なくとも 1 つの虚数解を持つ。(証明終)