

2014 年京大理 1 文 3 共通

l 上、 m 上、 n 上の点は、それぞれ $(1+2p, p, -2-p)$ 、 $(1+q, 2-q, -3+q)$ 、 $(1+r, -1+2r, r)$ と表せる。
 $P(1+2p, p, -2-p)$ 、 $Q(1+q, 2-q, -3+q)$ 、 $R(1+r, -1+2r, r)$ とすると

$$\overrightarrow{PQ} = (q-2p, 2-q-p, -1+q+p) \quad \overrightarrow{PR} = (r-2p, -1+2r-p, 2+r+p)$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = (q-2p) - (2-q-p) + (-1+q+p) = -3+3q=0 \quad \therefore q=1$$

$$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{w} = (r-2p) + 2(-1+2r-p) + (2+r+p) = 6r-3p=0 \quad \therefore r = \frac{1}{2}p$$

$\overrightarrow{PQ} = (1-2p, 1-p, p)$ 、 $\overrightarrow{PR} = \left(-\frac{3}{2}p, -1, 2+\frac{3}{2}p\right)$ であるから

$$PQ^2 + PR^2 = 1-4p+4p^2 + 1-2p+p^2 + p^2 + \frac{9}{4}p^2 + 1+4+6p+\frac{9}{4}p^2 = 7 + \frac{21}{2}p^2$$

$PQ^2 + PR^2$ を最小にする p は、 $p=0$ であるから

$PQ^2 + PR^2$ を最小にする P は $(1, 0, -2)$ 、 $PQ^2 + PR^2$ の最小値は 7 …… (答)