2014 年京大理 $\boxed{2}$

1 つの粒子が n 秒後に点 A, B, C にいる確率を、それぞれ a_n, b_n, c_n とする。

$a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+c_n)=\frac{1}{2}(1-a_n)$ より　$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$

$a_1=0$ より　$a_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　$\therefore a_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

対称性により、$b_n=c_n=\frac{1}{2}(1-a_n)$ であるから、求める確率は

$$a_n{}^2+b_n{}^2+c_n{}^2=a_n{}^2+2\cdot\frac{1}{4}(1-a_n)^2=\frac{3}{2}a_n{}^2-a_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{1-2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\right\}-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right\}\quad\cdots\cdots(答)$$

なお、$n=0$ のとき確率は 1 であるから、$n=0$ でも成立する。