2014 年京大理 $\boxed{4}$

$f(x) \leqq f(x)^3 - 2f(x)^2 + 2$ のとき

$f(x)^3 - 2f(x)^2 - f(x) + 2 = (f(x)+1)(f(x)-1)(f(x)-2) \geqq 0 \quad \therefore -1 \leqq f(x) \leqq 1,\ 2 \leqq f(x)$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{a+\dfrac{b}{x}}{x+1+\dfrac{1}{x}} = 0$ より、すべての実数 x で $2 \leqq f(x)$ とはならない。

$-1 \leqq f(x) \leqq 1$ となる条件を考える。$x^2 + x + 1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ より、$f(x)$ はすべての実数 x で連続。

$-1 \leqq \dfrac{ax+b}{x^2+x+1} \leqq 1 \quad -x^2 - x - 1 \leqq ax + b \leqq x^2 + x + 1$

$\therefore x^2 + (a+1)x + b + 1 \geqq 0,\ x^2 - (a-1)x - (b-1) \geqq 0$ ——①

①がすべての実数 x で成り立つには、$x^2 + (a+1)x + b + 1 = 0,\ x^2 - (a-1)x - (b-1) = 0$ が、ともに相違なる 2 つの実数解を持たなければよいから

$(a+1)^2 - 4(b+1) \leqq 0,\ (a-1)^2 + 4(b-1) \leqq 0 \quad \therefore \dfrac{1}{4}(a+1)^2 - 1 \leqq b \leqq -\dfrac{1}{4}(a-1)^2 + 1$

$\dfrac{1}{4}(a+1)^2 - 1 = -\dfrac{1}{4}(a-1)^2 + 1$ とすると　$(a+1)^2 + (a-1)^2 = 2a^2 + 2 = 8 \quad a^2 = 3 \quad \therefore a = \pm\sqrt{3}$

図示すると右の通りである。境界線を含む。