2014 年京大理 $\boxed{5}$

a^3+b^3 は 3 の倍数であるから

$a=3m+1,\ b=3n+1$ のとき　$a^3+b^3=(3の倍数)+1+1=(3の倍数)+2$

$a=3m+2,\ b=3n+2$ のとき　$a^3+b^3=(3の倍数)+8+8=(3の倍数)+1$

$a=3m+2,\ b=3n+1$ のとき　$a^3+b^3=(3の倍数)+8+1=(3の倍数)$

$a=3m+1,\ b=3n+2$ のとき　$a^3+b^3=(3の倍数)+1+8=(3の倍数)$

$a,\ b$ のうち、一方は 3 で割った余りが 1 で、もう一方は 3 で割った余りが 2 である。

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=81k$ とすると

$a=3m+2,\ b=3n+1$ のとき

$a+b=3(m+n+1)$　　$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab=9(m+n+1)^2-3(9mn+3m+6n+2)$

$9(m+n+1)\left\{3(m+n+1)^2-9mn-3m-6n-2\right\}=81k$

$(m+n+1)\left\{3(m+n+1)^2-3(3mn+m+2n)-2\right\}=9k$

$m+n+1$ が 9 の倍数でなければならない。このとき、$m+n$ の最小値は　$\therefore m+n=8$

$n=8-m\ (0\leqq m\leqq 8)$ とすると　$b=3(8-m)+1=25-3m$

$$a^2+b^2=9m^2+12m+4+625-150m+9m^2=18m^2-138m+629$$

$$=18\left(m^2-\frac{23}{3}m\right)+629=18\left\{\left(m-\frac{23}{6}\right)^2-\frac{23^2}{36}\right\}+629=18\left(m-\frac{23}{6}\right)^2+\frac{729}{2}$$

$\dfrac{23}{6}$ に最も近い m は、$m=4$ であり、a^2+b^2 は $m=n=4$ のとき最小となる。

このとき　$\therefore a=14,\ b=13$　$\therefore a^2+b^2=196+169=365$

対称性より　$\therefore (a,\ b)=(14,\ 13),\ (13,\ 14)$　$a^2+b^2=365$ ……（答）