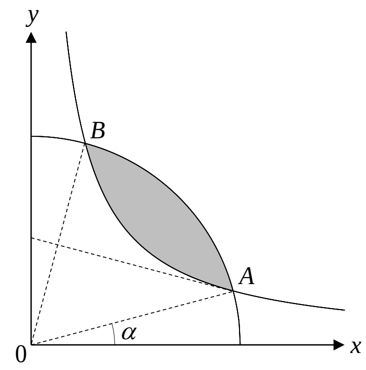
2014 年京大理 $\boxed{6}$

$C_1,\ C_2$ は $y=x$ に関して対称であり、2 交点 $A,\ B$ も $y=x$ に関して対称である。

2 交点のうち、$y<x$ に属する方を $A\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)\ (t>1)$ とする。



OA の傾きは $\dfrac{1}{t^2}$ であり、A における C_1 の接線 l の傾きは $-\dfrac{1}{t^2}$ である。

$\dfrac{1}{t^2}=\tan\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると、l と OA のなす角は 2α であるから

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac{2}{t^2}}{1-\frac{1}{t^4}}=\frac{2t^2}{t^4-1}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad t^4-1=2\sqrt{3}t^2\qquad t^4-2\sqrt{3}t^2-1=0$$

$t^2>0$ より　$t^2=\sqrt{3}+\sqrt{3+1}=2+\sqrt{3}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}$　　$t=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$　　$\dfrac{1}{t}=\dfrac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$p=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ q=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ とおくと、$A(p,\ q),\ B(q,\ p)$ である。

$p^2+q^2=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}=\dfrac{16}{4}=4$　　$\alpha=\dfrac{\pi}{12}$ であるから　$\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}-2\cdot\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}$

線分 AB と、C_2 で囲まれた部分の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

線分 AB と、C_1 で囲まれた部分の面積は

$$\frac{1}{2}(p+q)(p-q)-\int_q^p\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}-\left[\log x\right]_q^p=\sqrt{3}-\log\frac{p}{q}=\sqrt{3}-\log\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{3}-\log\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}=\sqrt{3}-\log\frac{8+4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}-\log(2+\sqrt{3})$$

C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積は　$\dfrac{2}{3}\pi-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\log(2+\sqrt{3})=\dfrac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})$　……(答)

(注)

$p=2\cos\dfrac{\pi}{12},\ q=2\sin\dfrac{\pi}{12}$ である。$t=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ の二重根号は、外せなくても解ける。