

2015 年京大文 5

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  とする。

$f(x)$  を  $g(x)$  で割った商を  $px+q$ 、余りを  $r$  とすると、 $h(x) = px+q + \frac{r}{dx+e}$  と書ける。

$f(x), g(x)$  の係数は、正の有理数であるから、 $p, q, r$  は有理数である。

$p = \frac{t}{s}$  とする。 $s, t$  は互いに素な整数で、 $s > 0$  である。 $m$  を整数とすると

$h(sm) = tm + q + \frac{r}{dsm+e}$  は、整数である。 $h(s(m+1)) = t(m+1) + q + \frac{r}{ds(m+1)+e}$  は、整数である。

$h(s(m+1)) - h(sm) = t + \frac{r}{dsm+ds+e} - \frac{r}{dsm+e} = t - \frac{dsr}{(dsm+ds+e)(dsm+e)}$  は、整数である。

$t$  は整数であるから、 $\frac{dsr}{(dsm+ds+e)(dsm+e)}$  は、任意の整数  $m$  について、整数である。

ここで、 $m$  を十分に大きくとれば、 $\left| \frac{dsr}{(dsm+ds+e)(dsm+e)} \right| < 1$  となるから、 $r=0$  でなければならない。

したがって、 $f(x)$  は  $g(x)$  で割り切れる。(証明終)

※理系 5 は、 $f(x), g(x)$  の係数は、正の実数となっており、有理数とは限らない。