

2015 年京大文 5

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ とする。

$f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $px+q$ 、余りを r とすると、 $h(x) = px+q + \frac{r}{dx+e}$ と書ける。

$f(x), g(x)$ の係数は、正の有理数であるから、 p, q, r は有理数である。

$p = \frac{t}{s}$ とする。 s, t は互いに素な整数で、 $s > 0$ である。 m を整数とすると

$h(sm) = tm + q + \frac{r}{dsm+e}$ は、整数である。 $h(s(m+1)) = t(m+1) + q + \frac{r}{ds(m+1)+e}$ は、整数である。

$h(s(m+1)) - h(sm) = t + \frac{r}{dsm+ds+e} - \frac{r}{dsm+e} = t - \frac{dsr}{(dsm+ds+e)(dsm+e)}$ は、整数である。

t は整数であるから、 $\frac{dsr}{(dsm+ds+e)(dsm+e)}$ は、任意の整数 m について、整数である。

ここで、 m を十分に大きくとれば、 $\left| \frac{dsr}{(dsm+ds+e)(dsm+e)} \right| < 1$ となるから、 $r=0$ でなければならない。

したがって、 $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。(証明終)

※理系 5 は、 $f(x), g(x)$ の係数は、正の実数となっており、有理数とは限らない。