

2016 年京大文 [1]

$$f(x) = x^3 + x^2 - x \text{ とすると } f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1)$$

$f(x)$ の増減は右の通り。

$$f(-1) = f(1) = 1, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{27} \text{ であるから}$$

$x^2 + y^2 \leq 2$ かつ $|x| \leq 1$ かつ $y \geq x^3 + x^2 - x$ を満たす領域を

図示すると、右図の通りである。

この領域のうち、 $y \geq 1$ の部分の面積は $\frac{1}{4} \times 2\pi - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = \frac{\pi}{2} - 1$

$y \leq 1$ の部分の面積は

$$\int_{-1}^1 (1 - x^3 - x^2 + x) dx = 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

求める面積は $\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{4}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ …… (答)

x	...	-1	...	$\frac{1}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

