2016年京大文 $\boxed{3}$

n進法で$2, 12, 1331$と表記される数を、10進法で表記すると、それぞれ、$2,\ n+2,\ n^3+3n^2+3n+1$である。

$2^{n+2}=n^3+3n^2+3n+1 \quad \therefore 2^{n+2}=(n+1)^3$ ——①

①の左辺は素因数を2しか持たないから、$n+1=2^m$という形でなければならない。

$n \geqq 4$より $2^m \geqq 5 \quad \therefore m \geqq 3$

①に代入して $2^{2^m-1+2}=(2^m)^3 \quad 2^{2^m+1}=2^{3m} \quad 2^m+1=3m \quad \therefore 2^m-3m+1=0$ ——②

$m=3$は、②を満たす。$m \geqq 4$のとき、②は成立しないことを示す。

$f(m)=2^m-3m+1$とすると $f(m+1)-f(m)=2^{m+1}-3(m+1)-2^m+3m=2^m-3$

$m \geqq 3$のとき、$2^m-3>0$であるから $f(m+1)-f(m)>0 \quad \therefore f(m+1)>f(m)$

$m \geqq 3$のとき、$f(m)$は単調増加であり、$f(3)=0$より、$m \geqq 4$のとき、$f(m) \neq 0$が示された。

以上により、求めるnは $\therefore n=2^3-1=7$ ……(答)