2017年京大文$\boxed{2}$

(1)

2以外の素因数を持たない自然数は、非負整数mによって2^mと書ける。

$1 \leqq 2^m < 10^{100}$　$0 \leqq \log_{10} 2^m < 100$が成り立つから　$0 \leqq m\log_{10} 2 < 100$　$0 \leqq m < \dfrac{100}{\log_{10} 2}$

$\dfrac{100}{0.301} = 332.2\cdots$　$\dfrac{100}{0.3011} = 332.1\cdots$　$\therefore 0 \leqq m \leqq 332$　したがって、333個 ……(答)

(2)

2と5以外の素因数を持たない自然数は、非負整数$m,\ n$によって$2^m 5^n$と書ける。

$10^{99} \leqq 2^m 5^n < 10^{100}$であるから

$m = n$のとき、$10^{99} \leqq 10^m < 10^{100}$であり、適するのは$m = n = 99$のみ。

$m > n$のとき　$10^{99} \leqq 2^m 5^n < 10^{100}$の各辺を、$10^n$で割ると　$10^{99-n} \leqq 2^{m-n} < 10^{100-n}$ ——①

$m - n > 0$であるから　$100 - n > 0$　$0 \leqq n \leqq 99$である。①を満たす$m,\ n$の組の個数は

$1 \leqq 2^{m-99} < 10$を満たすmの個数、$10 \leqq 2^{m-98} < 10^2$を満たすmの個数、$10^2 \leqq 2^{m-97} < 10^3$を満たす$m$の個数、…、$10^{98} \leqq 2^{m-1} < 10^{99}$を満たす$m$の個数、$10^{99} \leqq 2^m < 10^{100}$を満たす$m$の個数

の合計である。$m > n$であるから、$m = n = 99$は除く。

このような$m,\ n$の組の個数は、(1)で求めた$1 \leqq 2^m < 10^{100}$を満たす非負整数mの個数から、1を引いた値に等しいから、332個。

$m < n$のとき　$10^{99} \leqq 2^m 5^n < 10^{100}$の各辺を、$10^m$で割ると　$10^{99-m} \leqq 5^{n-m} < 10^{100-m}$ ——②

$n - m > 0$であるから　$100 - m > 0$　$0 \leqq m \leqq 99$である。

②を満たす$m,\ n$の組の個数は、$m > n$のときの議論から、$1 < 5^n < 10^{100}$を満たす自然数nの個数に等しい。

$0 < n(1 - \log_{10} 2) < 100$　$0 < n < \dfrac{100}{1 - \log_{10} 2}$　$0.6989 < 1 - \log_{10} 2 < 0.699$であるから

$\dfrac{100}{0.699} = 143.0\cdots$　$\dfrac{100}{0.6989} = 143.0\cdots$　$\therefore 0 < n \leqq 143$　したがって、$m < n$である組は、143個。

以上により　求める個数は　$1 + 332 + 143 = 476$個 ……(答)